Двадцатый Первый Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 17 октября 2010.

Четвертый тур. Лига тактик

1. Тройка натуральных чисел (x, y, z) — решение уравнения $xy^2+y=(x+1)z^2+z$. Докажите, что $y-z$ является точным квадратом.

2. Дан четырехугольник $ABCD$. На стороне AD нашлась точка X такая, что $\angle BXC = 90^\circ$. Описанные окружности треугольников ABX и CDX пересекают сторону BC в точках K и L соответственно (точка K ближе к точке B, чем точка L) и сами пересекаются в точке F. Оказалось, что $BK = LC$. Найдите угол KFL.

3. Положительные числа a, b и c таковы, что $a^2+b^2+c^2=1$. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{(ab+c)^2}+\frac{1}{(bc+a)^2}+\frac{1}{(ca+b)^2} \geqslant \frac{1}{1-a^4}+\frac{1}{1-b^4}+\frac{1}{1-c^4}.$$

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые представимы в виде суммы квадратов четырех натуральных чисел единственным образом. (Способы, отличающиеся перестановкой слагаемых, считаются одинаковыми.)

5. Дано множество $M = \{1, 2, \ldots, 15\}$. Можно ли выбрать несколько семиэлементных подмножеств множества M так, чтобы любые три элемента лежали ровно в одном выбранном подмножестве?

6. В остроугольном треугольнике ABC отрезок AM — медиана, а отрезок BD — высота. Оказалось, что отрезок MD — биссектриса треугольника AMC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC, центр вписанной окружности треугольника AMB, а также точки A и B лежат на одной окружности.

7. Двое по очереди красят ребра некоторого связного графа: первый — в красный цвет, второй — в синий (перекрашивать нельзя). Второй выигрывает, если синий граф окажется связным. Докажите, что если у него есть выигрышная стратегия, то граф содержит два связных реберно непересекающихся подграфа, у каждого из которых вершин столько же, сколько и у исходного графа.

8. Пусть π — перестановка чисел 1, 2, …, 2010. Назовем перестановку π *кубичной*, если перестановка π^3 тождественна. Докажите, что количество кубичных перестановок делится на 3^{335}.

9. Найдите все такие иррациональные числа x, что числа x^2+2x и x^3-6x являются рациональными.

10. В таблице $m \times n$ расставлены неотрицательные числа, причем в каждом ряду (строке или столбце) есть положительное число. Если на пересечении строки и столбца стоит положительное число, то суммы чисел в этой строке и этом столбце равны. Докажите, что $m = n$.